Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 120

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof.Luigi Chierchia

Tutori: Vincenzo Morinelli, Emanuele Padulano

Tutorato 3 maggio 2012

Successioni e serie di funzioni

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+1}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$

   (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (e) $f_n(x) = \cos^n x$

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(n^2x^2\right)}{n^2x^2+1}$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}x^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(3+(-1)^n\right)^n x^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right) x^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4\log n}}{x^n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$

3. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{nx^4+n^3}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x x^n$

4. (a) Siano $f_n \in \mathcal{C}((a,b))$, continue in (a,b), $f \in \mathcal{C}((a,b))$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.. Supponiamo che:

      i. f_n converga uniformemente ad f per ogni $[\alpha,\beta] \Subset (a,b)$

      ii. $\exists\, g \in \mathcal{C}((a,b))$, $g \geq 0$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall n \geq \overline{n}$, $\forall x \in (a,b)$ con $\int_a^b g(x)dx \leq +\infty$

   Allora
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

   (b) Usando quanto dimostrato calcolare

      i. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}dx$

      ii. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+x}dx$ *(Suggerimento: integrare per parti)*

5. Stabilire la convergenza dei seguenti integrali al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{1+t} dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{\alpha}} dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1+\alpha\cos t) dt$